

NUEVA APROXIMACIÓN AL MÉTODO TÓPSIS DIFUSO CON ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS

M. Socorro Garcia-Cascales¹, M. Teresa Lamata²

¹ Dpto de Electrónica, Tecnología de Computadoras y Proyectos.
Universidad de Politécnica de Cartagena. Murcia, España, socorro.garcia@upct.es

² Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial.
Universidad de Granada. 18071- Granada. España, mtl@decsai.ugr.es

Resumen

Es bien conocido que la mayoría de los modelos de toma de decisión no establecen su salida de resultados basados en la entrada de los mismos. En la mayor parte de los casos la salida de datos de los modelos es de tipo numérico. Un ejemplo podemos verlo en el método TOPSIS que evalúa las alternativas mediante un ranking. El presente trabajo se basa en el método TOPSIS, pero ha sido adaptado de manera que la salida de datos sea lingüística así como lo es la entrada de los mismos. Finalmente, se ilustra el modelo propuesto mediante un ejemplo.

Palabras Clave: TOPSIS, Etiquetas lingüísticas

Pero existen también algunas desventajas como son:

- La existencia de orden inverso
 - Y que se pueden utilizar etiquetas lingüísticas como entrada de datos, mientras que la salida es un número asociado con el índice de proximidad, por tanto numérico. Con respecto a esto, intentamos hacer una modificación en el algoritmo del modelo TOPSIS difuso de manera que si la entrada de datos es lingüística entonces la salida de los mismos también lo sea.
- El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2, se describen las variables lingüísticas y los conjuntos difusos. La sección 3 presenta el método TOPSIS así como el método algorítmico propuesto. En la sección 4 se presenta un ejemplo de aplicación y finalmente se resumen las principales conclusiones.

2 VARIABLES LINGÜÍSTICAS Y CONJUNTOS DIFUSOS

2.1. VARIABLE LINGÜÍSTICA

1 INTRODUCCION

La Toma de Decisión Multicriterio es un proceso que consiste en encontrar la mejor alternativas de entre un conjunto de alternativas factibles.

Entre los diversos métodos compensatorios de la Toma de Decisión Multicriterio, es posible considerar un subgrupo que incluye aspectos de costes y beneficios. Uno de ellos es el método TOPSIS (Technique for Order Performance by Similarity to Idea Solution) Técnica para ordenar las preferencias mediante similitud a la solución ideal. Esta aproximación se utiliza por cuatro razones principales [11]:

- a. La lógica aplicada en TOPSIS es racional y comprensible;
- b. Los procesos de computación son sencillos
- c. El concepto permite la búsqueda de las mejores alternativas para cada criterio mostrándose en una forma matemática simple.
- d. La importancia de los pesos se incorporan en los procesos de comparación

La mayor parte de las veces, el decisor no es capaz de definir la importancia de los criterios y/o la bondad de las alternativas con respecto a cada criterio en términos numéricos. En la mayoría de las situaciones, estas valoraciones son lingüísticas, dando lugar a medidas o cantidades que no son exactas sino aproximadas.

Desde que Zadeh [12] introdujera el concepto de conjunto difuso y el de variable lingüística la popularidad y el uso de la lógica difusa ha sido extraordinario. Estamos particularmente interesados en el papel de las variables lingüísticas como una escala ordinal así como en sus términos asociados, en este caso de decisión multicriterio. Por *variable lingüística* [13,14,15] se entiende una variable cuyos valores son palabras o sentencias en un lenguaje natural o artificial. Por ejemplo la *edad* es una variable lingüística si sus valores son lingüísticos en vez de numéricos, por ejemplo, joven, no joven, muy joven, bastante joven, viejo, no muy viejo, no muy joven, etc en lugar de números como 20,21,22,23,...etc. En general, las

variables lingüísticas forman un conjunto ordenado $\mathfrak{A} = \{L_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ siendo $L_i < L_j \Leftrightarrow i < j$.

Definición 1: Una variable lingüística se caracteriza por un quintuplo

$$\{X; T(X); U; G; M\} \quad (1)$$

Donde:

1. X es el nombre de la variable
2. $T(X)$ es el término del conjunto de X , esto es, la colección de sus valores lingüísticos.
3. U es un universo de discusión de la variable
4. G es la regla sintáctica para la generación de los elementos de $T(X)$ y
5. M es la regla semántica que asocia a cada elemento de $T(X)$ su significado.

En general para el decisor es más fácil cuando el/ella evalúa sus juicios mediante términos lingüísticos que cuando lo hace con números. Siendo, en estos casos, el concepto de número difuso más adecuado que el de número real para su representación

2.2. CONJUNTOS DIFUSOS

La teoría de conjuntos difusos, introducida por Zadeh [12] para tratar problemas vagos inciertos e imprecisos se ha utilizado como una herramienta de modelado para sistemas complejos que pueden ser controlados por los humanos pero que son difíciles de definir con precisión. El fundamento teórico de los números triangulares difusos puede verse en Klir [9]

Definición 2: Si T_1 y T_2 son dos números triangulares difusos definidos por las tripletas (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) respectivamente. Entonces, para este caso, las operaciones aritméticas necesarias con números difusos positivos son:

a) *Adición*

$$T_1 \oplus T_2 = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2] \quad (2)$$

b) *Sustracción*

$$T_1 \ominus T_2 = T_1 + (-T_2) \text{ donde el opuesto } -T_2 = (-c_2, -b_2, -a_2)$$

$$\text{entonces } T_1 \ominus T_2 = [a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2] \quad (3)$$

c) *Multipliación*

$$T_1 \otimes T_2 = [a_1 \times a_2, b_1 \times b_2, c_1 \times c_2] \quad (4)$$

d) *División*

$$T_1 \oslash T_2 = \left[\frac{a_1}{c_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{a_2} \right], \quad 0 \neq [a_2, b_2, c_2] \quad (5)$$

e) *Raíz cuadrada.*

$$T_1^{1/2} = [a_1^{1/2}, b_1^{1/2}, c_1^{1/2}] \quad (6)$$

3. TOPSIS

El método TOPSIS es un modelo de decisión propuesto para ordenar preferencias por similitud a una solución ideal, es por tanto un método de ranking. Fue desarrollado por Hwang y Yoon [6] en 1981 y mejorada por los propios autores en 1987 y 1992, también trabajaron Zeleny [17], Lai et al [10], García-Cascales y Lamata [5] y muchos más.

TOPSIS es un método de decisión multicriterio de ordenación para identificar las soluciones de un conjunto finito de alternativas. El principio básico es que la alternativa elegida debe tener la menor distancia a la solución ideal positiva y la mayor distancia a la solución ideal negativa. Una solución ideal se define como una colección de puntuaciones o valores en todos los atributos considerados en la decisión, pudiendo suceder que tal solución sea inalcanzable. El vector compuesto por los mejores valores del j-ésimo atributo respecto de todas las alternativas posibles es quien recibe el nombre de “solución ideal positiva” (SIP); reciprocamente, la “solución ideal negativa” (SIN) será aquella cuyo vector contenga los peores valores en todos los atributos.

El concepto intuitivo de alternativa ideal es que sería aquella que, sin dudarlo, siempre elegiría el decisor. De igual modo, la alternativa anti-ideal sería aquella que, sin dudarlo, nunca elegiría el decisor.

De este modo, puede suceder que una alternativa seleccionada desde el punto de vista de su “distancia” más corta respecto de la solución ideal positiva, Zeleny [17] deba competir con otra alternativa seleccionada como la más lejana de la solución ideal negativa. Por ello, y a fin de definir la solución ideal, el método TOPSIS define un índice de similaridad que se construye combinando la proximidad al ideal positivo y la lejanía respecto al ideal negativo.

El procedimiento de TOPSIS puede expresarse en una serie de pasos que pueden verse en Chen y Hwang [2], y que nosotros reproducimos modificado para el problema que resolvemos a continuación.

3.1. METODO ALGORÍTMICO PROPUESTO

Proponemos un algoritmo para determinar la opción preferible entre todas las posibles alternativas:

Paso 1: Identificación de los criterios de evaluación de forma que relacione las capacidades del sistema con los objetivos.

Paso 2: Generación de alternativas determinando el sistema finito de alternativas para lograr el objetivo.

Paso 3: Evaluación de las alternativas en función de los criterios.

Paso 4: Identificación del peso de los criterios. Es importante considerar que los criterios puedan tener distinta importancia.

Paso 5: Construcción de la matriz de decisión con números difusos.

Paso 5bis: Introducción de alternativas ficticias, donde al conjunto de alternativas le añadiremos las alternativas correspondientes a la valoración de todos los criterios por el valor correspondiente de cada una de las etiquetas utilizadas en el problema. Entenderemos estas variables como ficticias

Paso 6: La matriz de decisión normalizada asociada. Para ello los valores de cada criterio los dividimos por la norma con objeto de que la escala sea la misma para todos los criterios.

$$\bar{n}_{ij} = x_{ij} / \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij})^2}, j=1, \dots, n, i=1, \dots, m \quad (7)$$

utilizando para los números difusos las operaciones definidas (2), (4), (5) y (6), siendo el resultado $\bar{n}_{ij} = (n_{ij}^a, n_{ij}^b, n_{ij}^c)$ otro número difuso.

Paso 7: Construcción de la matriz ponderada normalizada asociada.

$$\bar{v}_{ij} = w_j \bar{n}_{ij}, j=1, \dots, n, i=1, \dots, m, \quad (8)$$

Donde $\bar{v}_{ij} = (v_{ij}^a, v_{ij}^b, v_{ij}^c)$ y operaremos utilizando la ecuación (4).

Paso 8: Determinación de la solución ideal positiva y la solución ideal negativa, respectivamente.

$$\bar{A}^+ = \{\bar{v}_1^+, \dots, \bar{v}_n^+\} = \left\{ \begin{array}{l} (\max \bar{v}_{ij}, j \in J), \\ (\min \bar{v}_{ij}, j \in J') \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\bar{A}^- = \{\bar{v}_1^-, \dots, \bar{v}_n^-\} = \left\{ \begin{array}{l} (\min \bar{v}_{ij}, j \in J), \\ (\max \bar{v}_{ij}, j \in J') \end{array} \right\} \quad (10)$$

donde J está asociado con aquellos criterios que indican ganancias o beneficios y J' está asociado con los criterios que indican pérdidas o costes.

Al haber introducido en la matriz las distintas variables lingüísticas, podemos observar que $A^+ = L_n$ y $A^- = L_1$.

Paso 9: Cálculo de la separación de cada alternativa con respecto a la solución ideal positiva y a la solución ideal negativa respectivamente:

$$\bar{d}_i^+ = \left\{ \sum_{j \in J} (\bar{v}_{ij} - \bar{v}_j^+)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, i=1, \dots, m \quad (11)$$

$$\bar{d}_i^- = \left\{ \sum_{j \in J'} (\bar{v}_{ij} - \bar{v}_j^-)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, i=1, \dots, m \quad (12)$$

en este caso usamos la distancia euclídea, pero podríamos haber tenido en cuenta cualquier otra.

Paso 10: Cálculo de la proximidad relativa de cada alternativa a la solución ideal positiva y negativa mediante el índice de proximidad.

$$\bar{R}_i = \frac{\bar{d}_i^-}{\bar{d}_i^+ + \bar{d}_i^-}, i=1, \dots, m \quad (13)$$

Si $\rightarrow \bar{R}_i \cong 1 \rightarrow A_i = \bar{A}^+$

Si $\rightarrow \bar{R}_i \cong 0 \rightarrow A_i = \bar{A}^-$

Paso 11: Establecimiento del orden de preferencias de todas las alternativas de acuerdo al coeficiente de proximidad. Obviamente, una alternativa A_j está más próxima a la $\bar{A}^+$ y más lejana de $\bar{A}^-$ cuanto más se aproxima a 1 el índice $\bar{R}_i$

Paso 12: Defuzzificación

De entre los muchos métodos posibles existentes en la literatura nos quedamos con el propuesto en [3]. Para ello el cálculo lo haremos sobre la siguiente expresión

$$I_{\beta, \lambda}(A_i) = \beta S_M(A_i) + (1-\beta)\lambda S_R(A_i) + (1-\beta)(1-\lambda)S_L(A_i)$$

Donde:

- $S_L(A_i)$ es el valor inferior medio asociado con la función inversa $g_A^L(x)$.
- $S_M(A_i)$ es el área del corazón del número difuso y
- $S_R(A_i)$ representa el valor superior medio del número difuso que está asociado con la función inversa $f_A^R(x)$.
- $\beta \in [0,1]$ es el índice de modalidad representando la importancia del valor central y
- $\lambda \in [0,1]$ es el grado de optimismo del decisor.

Estas áreas están representadas en la fig1.

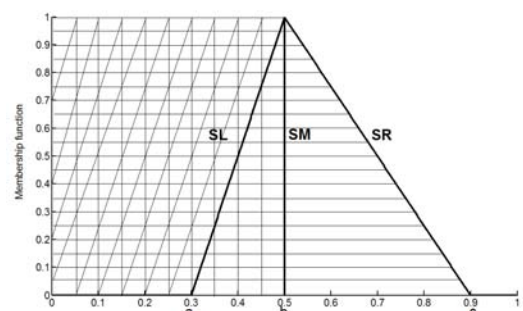


Figura 1. Representación de $S_L(A_i)$, $S_M(A_i)$ y $S_R(A_i)$

En este problema hemos considerado que las tres áreas tienen la misma importancia ó peso. Correspondiéndose con un decisor neutral donde $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1/3$

Paso 13. Salida de valores lingüísticos.

Una vez obtenida la defuzzificación en el paso anterior, los valores obtenidos son reales y por lo tanto tenemos un orden definido entre ellos, así como la posibilidad de encontrar la mínima distancia de cada una de las alternativas a las alternativas ficticias introducidas en el paso 5bis.

4. CASO PRÁCTICO

En esta sección, trabajamos con un caso real de decisión para ilustrar el método de decisión TOPSIS mediante el algoritmo propuesto.

El objetivo global del problema es decidir cual es el mejor sistema de lavado de las piezas para un motor diesel y su

valoración final en los mismos términos que la entrada. El problema del que se parte García-Cascales y Lamata [5] es el siguiente; contamos con piezas que tienen diversos grados de suciedad, con geometría y peso muy diferente, y necesitamos un proceso de trabajo que exige rapidez y flexibilidad a la hora de limpiar piezas y donde se deben tener en cuenta criterios como el coste total de operación anual, la productividad del sistema empleado, la capacidad de carga del sistema, la eficiencia en la limpieza y la salubridad de los productos utilizados. Al abordar el problema nos encontramos con unos criterios cuyos datos se podían cuantificar y otros que no, dadas sus características, la evaluación solo podía obtenerse mediante valores lingüísticos.

4.1. ESTRUCTURACIÓN DEL PROBLEMA DE DECISIÓN

Establecer los criterios de decisión

- C1: Coste Total de operación anual.
- C2: Productividad volumétrica de la Pila
- C3: Capacidad de carga
- C4: Eficiencia en la limpieza
- C5: Salubridad

Determinar las alternativas

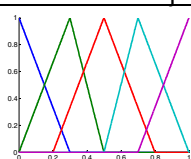
- A1: Lavadora convencional
- A2: Lavado químico
- A3: Lavado ultrasonidos

4.2. ANÁLISIS DEL PROBLEMA DE DECISIÓN

Consiste en evaluar las alternativas en términos de los criterios mediante las siguientes etiquetas que modelizaremos a través de números difusos triangulares y que recogemos en la tabla 1.

Tabla 1: Valores numéricos asociados a las etiquetas de bondad

	Pesos de los C_j	Pesos de los C_j
Muy malo (Mm)	[0, 0, 0.3]	
Malo (m)	[0, 0.3, 0.5]	
Regular (R)	[0.2, 0.5, 0.8]	
Bueno (B)	[0.5, 0.7, 1]	
Muy bueno (MB)	[0.7, 1, 1]	



En este caso, se opta por números difusos no simétricos como es el caso de las etiquetas bueno y malo pero que si son simétricas respecto de la etiqueta central (regular), por estar más acordes con aquellos valores que expresó el decisor sobre la valoración de las etiquetas.

Paso 4. Identificar el peso de los criterios.

Las valoraciones para cada criterio fueron las siguientes:

C1: Muy Importante [0.7, 1, 1],

C2: Importante [0.2, 0.5, 0.8],

C3: Poco importante [0, 0, 0.3],

C4: Importante [0.2, 0.5, 0.8],

C5: Moderadamente importante [0, 0.3, 0.5],

Datos que una vez normalizados están expresados en la tabla 2.

Tabla 2: Pesos normalizados de la importancia de los criterios

	Pesos de los C_j	Pesos de los C_j normalizados
MI	[0.5, 0.7, 1]	[0.20, 0.43, 0.91]
I	[0.2, 0.5, 0.8]	[0.06, 0.22, 0.73]
PI	[0, 0, 0.3]	[0, 0, 0.27]
I	[0.2, 0.5, 0.8]	[0.06, 0.22, 0.73]
MoI	[0, 0.3, 0.5]	[0, 0.13, 0.45]

Paso 5 y 5b: Construir la matriz de decisión correspondiente junto con las cinco etiquetas de valoración (tabla 3).

Paso 6: así como la matriz de decisión normalizada. (Tabla 4 y Tabla 5 ver apéndice)

Tabla 3: Información lingüística del problema de decisión

	MI	I	PI	I	MoI
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	B	B	M	R	R
A_2	R	M	MB	B	Mm
A_3	M	MB	R	B	B
Mm	Mm	Mm	Mm	Mm	Mm
m	M	m	m	m	m
R	R	R	R	R	R
B	B	B	B	B	B
MB	MB	MB	MB	MB	MB

Paso 7: Construir la matriz ponderada normalizada. (Tabla 6, ver apéndice), para ello operamos mediante la expresión (4).

Paso 8: Determinar la solución ideal positiva y la solución ideal negativa, que se exponen en la (tabla 7 ver apéndice). Se puede comprobar que se corresponden con las etiquetas: Muy bueno y Muy malo, respectivamente.

Paso 9: Calcular la distancia de cada alternativa a la solución ideal positiva y a la solución ideal negativa que reflejamos en la tabla 8.

Tabla 8: Valores de las distancias a las alternativas ideal y anti-ideal

$d+A1$	0.0227	0.1146	0.1940	$d-A1$	0.0474	0.2159	0.8375
$d+A2$	0.0492	0.1798	0.4597	$d-A2$	0.0221	0.1625	0.6577
$d+A3$	0.0636	0.1899	0.4424	$d-A3$	0.0223	0.1773	0.7122
$d+Mm$	0.0684	0.3257	0.9321	$d-Mm$	0.0000	0.0000	0.0000
$d+m$	0.0684	0.2280	0.6658	$d-m$	0.0000	0.0977	0.2663
$d+R$	0.0488	0.1629	0.2663	$d-R$	0.0195	0.1629	0.6658
$d+B$	0.0195	0.0977	0.0000	$d-B$	0.0488	0.2280	0.9321
$d+MB$	0.0000	0.0000	0.0000	$d-MB$	0.0684	0.3257	0.9321

Paso 10: Calcular el coeficiente de proximidad. (Tabla 9).

Tabla 9: Coeficiente de proximidad

RA1	0.0460	0.6533	11.9366
RA2	0.0198	0.4747	9.2296
RA3	0.0193	0.4827	8.2866
RMm	0.0000	0.0000	0.0000
Rm	0.0000	0.3000	3.8947
RR	0.0210	0.5000	9.7367
RB	0.0524	0.7000	13.6314
RMB	0.0734	1.0000	13.6314

Pasos 11 y 12: Defuzzificación, ordenación de las alternativas y salida lingüística de resultados.

	Salida defuzzificada	Orden	Salida lingüística
IA1	2.4326	1	Regular-Bueno
IA2	1.8580	2	Malo-Regular
IA3	1.7061	3	Malo-Regular
IMm	0.0000		
Im	0.8491		
IR	1.9596		
IB	2.7473		
IMB	2.9508		

5. CONCLUSIONES

En la mayoría de los casos los sistemas de decisión dan las salidas de los datos en forma numérica. Parece más lógico que el decisor quiera que su resultado sea dado en los mismos términos que el input. Por ello, hemos incluido ciertas modificaciones al método TOPSIS de manera que la salida de los datos de esta metodología sea en los mismos términos que la entrada de datos, que en este caso se ha realizado mediante términos lingüísticos. En este artículo, hemos estudiado un problema de decisión multicriterio difuso como ejemplo de aplicación de las modificaciones propuestas al método TOPSIS difuso, para así apreciar la bondad de las aportaciones al mismo.

Agradecimientos

Este artículo se ha elaborado bajo los proyectos financiados por la DGICYT, TIN2008-06872-C04-04 y Junta de Andalucía (P07-TIC02970), respectivamente.

Referencias

[1] R.E. Bellman, L.A. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Sci.*, 17, 141-164.,1970.

[2] Chen, S.J y Hwang, C.L. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlang, Berlin, 1992.

[3] M.S, Garcia-Cascales,., M.T. Lamata,: A modification to the index of Liou and Wang for ranking fuzzy number, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 411-424, 2007.

[4] García-Cascales, M.S y Lamata, M.T. Multi-criteria análisis for a maintenance mangement problema in an Enghien factory: racional Choice. In press *Journal of Intelligent Manufacturing*. 2009.

[5] García-Cascales, M.S y Lamata, M.T. Selection of a cleaning system for a engine maintenance based on the analytic hierarchy process. *Computer and Industrial Engineering* 56, 1442-1451, 2009

[6] Hwang, C.L y Yoon, K. *Multiple Attibute Decision Methods and Applications*, Springer, Berlin Heidelberg, 1981

[7] J. Kacprzyk, R.R. Yager. Linguistic summaries of data using fuzzy logic. *International Journal of General Systems*. 30, 2, 133-154, 2001.

[8] E.E. Kerre. The use of fuzzy set theory in electrocardiological diagnostics, in: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Approximate Reasoning in Decision Analysis* Amsterdam; North-Holland 277-282, 1982.

[9] G.J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy sets and Fuzzy Logic*, Prentice Hall PTR, New Jersey e d. 1995

[10] Lai, Y.J, Liu, T.Y y Hwang, C.L. TOPSIS for MODM, *European Journal of Operational Research* 76 (3), 486-500, 1994.

[11] T.C. Wang, T.H. Chang. Application of TOPSIS in evaluating initial training aircraft under a fuzzy environment. *Expert Systems with Applications* 33, (4), 870 (2007).

[12] L. A. Zadeh . Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338-353, 1965.

[13] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning: Part 1. *Information Sciences*, 8, 199-249, 1975.

[14] L. A. Zadeh, J. Kacprzyk (eds). *Computing with Words in Information / Intelligent Systems 1. Foundations. Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Physica-Verlag (Springer-Verlag), Heidelberg and New York. Vol. 34 1999.

[15] L. A. Zadeh, J. Kacprzyk (eds). *Computing with Words in Information / Intelligent Systems 2. Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica-Verlag (Springer-Verlag), Heidelberg and New York. Vol. 33 1999.

[16] Zeleny, M. Multiple Criteria Decision Making, McGraw-Hill, New York, 1982

Apéndice A

Tabla 4: Matriz de decisión

	C1	C2	C3	C4	C5
Pesos	0.2000 0.4300 0.9100	0.0600 0.2200 0.7300	0.0000 0.0000 0.2700	0.0600 0.2200 0.7300	0.0000 0.1300 0.4500
A1	0.5000 0.7000 1.0000	0.5000 0.7000 1.0000	0.0000 0.3000 0.5000	0.2000 0.5000 0.8000	0.2000 0.5000 0.8000
A2	0.2000 0.5000 0.8000	0.0000 0.3000 0.5000	0.7000 1.0000 1.0000	0.5000 0.7000 1.0000	0.0000 0.0000 0.3000
A3	0.0000 0.3000 0.5000	0.7000 1.0000 1.0000	0.2000 0.5000 0.8000	0.5000 0.7000 1.0000	0.5000 0.7000 1.0000
Mm	0.0000 0.0000 0.3000	0.0000 0.0000 0.3000	0.0000 0.0000 0.3000	0.0000 0.0000 0.3000	0.0000 0.0000 0.3000
m	0.0000 0.3000 0.5000	0.0000 0.3000 0.5000	0.0000 0.3000 0.5000	0.0000 0.3000 0.5000	0.0000 0.3000 0.5000
R	0.2000 0.5000 0.8000	0.2000 0.5000 0.8000	0.2000 0.5000 0.8000	0.2000 0.5000 0.8000	0.2000 0.5000 0.8000
B	0.5000 0.7000 1.0000	0.5000 0.7000 1.0000	0.5000 0.7000 1.0000	0.5000 0.7000 1.0000	0.5000 0.7000 1.0000
MB	0.7000 1.0000 1.0000	0.7000 1.0000 1.0000	0.7000 1.0000 1.0000	0.7000 1.0000 1.0000	0.7000 1.0000 1.0000

Tabla 5: Matriz normalizada

	C1	C2	C3	C4	C5
nA1	0.2266 0.4292 0.9667	0.2186 0.3791 0.8111	0.0000 0.1685 0.4369	0.0844 0.2858 0.6963	0.0922 0.3119 0.7734
nA2	0.0906 0.3066 0.7734	0.0000 0.1625 0.4056	0.3172 0.5617 0.8737	0.2109 0.4002 0.8704	0.0000 0.0000 0.2900
nA3	0.0000 0.1839 0.4834	0.3061 0.5415 0.8111	0.0906 0.2808 0.6990	0.2109 0.4002 0.8704	0.2304 0.4366 0.9667
nMm	0.0000 0.0000 0.2900	0.0000 0.0000 0.2433	0.0000 0.0000 0.2621	0.0000 0.0000 0.2611	0.0000 0.0000 0.2900
nm	0.0000 0.1839 0.4834	0.0000 0.1625 0.4056	0.0000 0.1685 0.4369	0.0000 0.1715 0.4352	0.0000 0.1871 0.4834
nR	0.0906 0.3066 0.7734	0.0875 0.2708 0.6489	0.0906 0.2808 0.6990	0.0844 0.2858 0.6963	0.0922 0.3119 0.7734
nB	0.2266 0.4292 0.9667	0.2186 0.3791 0.8111	0.2266 0.3932 0.8737	0.2109 0.4002 0.8704	0.2304 0.4366 0.9667
nMB	0.3172 0.6131 0.9667	0.3061 0.5415 0.8111	0.3172 0.5617 0.8737	0.2953 0.5717 0.8704	0.3225 0.6238 0.9667

Tabla 6: Matriz ponderada normalizada

	C1	C2	C3	C4	C5
vA1	0.0453 0.1846 0.8797	0.0131 0.0834 0.5921	0.0000 0.0000 0.1180	0.0051 0.0629 0.5083	0.0000 0.0405 0.3480
vA2	0.0181 0.1318 0.7038	0.0000 0.0357 0.2961	0.0000 0.0000 0.2359	0.0127 0.0880 0.6354	0.0000 0.0000 0.1305
vA3	0.0000 0.0791 0.4399	0.0184 0.1191 0.5921	0.0000 0.0000 0.1887	0.0127 0.0880 0.6354	0.0000 0.0568 0.4350
vMm	0.0000 0.0000 0.2639	0.0000 0.0000 0.1776	0.0000 0.0000 0.0708	0.0000 0.0000 0.1906	0.0000 0.0000 0.1305
vm	0.0000 0.0791 0.4399	0.0000 0.0357 0.2961	0.0000 0.0000 0.1180	0.0000 0.0377 0.3177	0.0000 0.0243 0.2175
vR	0.0181 0.1318 0.7038	0.0052 0.0596 0.4737	0.0000 0.0000 0.1887	0.0051 0.0629 0.5083	0.0000 0.0405 0.3480
vB	0.0453 0.1846 0.8797	0.0131 0.0834 0.5921	0.0000 0.0000 0.2359	0.0127 0.0880 0.6354	0.0000 0.0568 0.4350
vMB	0.0634 0.2636 0.8797	0.0184 0.1191 0.5921	0.0000 0.0000 0.2359	0.0177 0.1258 0.6354	0.0000 0.0811 0.4350

Tabla 7: Solución ideal positiva y negativa

	C1	C2	C3	C4	C5
A+	0.0634 0.2636 0.8797	0.0184 0.1191 0.5921	0.0000 0.0000 0.2359	0.0177 0.1258 0.6354	0.0000 0.0811 0.4350
A-	0.0000 0.0000 0.2639	0.0000 0.0000 0.1776	0.0000 0.0000 0.0708	0.0000 0.0000 0.1906	0.0000 0.0000 0.1305